Differentialrechnung – algebraisch betrachtet

Franz Pauer Florian Stampfer

Institut für Mathematik Universität Innsbruck
Technikerstr. 13/7, A-6020 Innsbruck, Österreich
franz.pauer@uibk.ac.at

1 Einleitung

Ein großer Teil der Aufgaben zur Differentialrechnung im Schulunterricht betrifft nur Polynomfunktionen. Diese Aufgaben könnten allerdings bereits mit den Kenntnissen der 10. Schulstufe (also ohne den Begriff „Grenzwert“) gelöst werden. Zum Beispiel ermöglicht es die Scheitelform einer quadratischen Funktion, sehr einfach Extremwertaufgaben für diese Funktionen zu lösen. Die einfache Idee, zum Auswerten einer Polynomfunktion an Stellen nahe bei 0 diese durch ihren linearen Anteil zu ersetzen, ermöglicht es, die Differentialrechnung für Polynomfunktionen zu entwickeln, ohne den Begriff Grenzwert zu verwenden. Dafür sind nur Kenntnisse über das Rechnen mit Polynomfunktionen nötig. Dieser Zugang könnte auch als Einführung in das Differenzieren als „Näherung von nichtlinearen Funktionen durch lineare“ für beliebige differenzierbare Funktionen verwendet werden.

2 Motivation

2.1 Extremwertaufgaben

Bei Extremwertaufgaben im Schulunterricht treten häufig quadratische Funktionen auf (vgl. [1], Kap. 3) . Diese Aufgaben können auch ohne Differentialrechnung gelöst werden. Wir zeigen das für die folgende Aufgabe aus ([1], S. 68, Nr. 3.116).

> Aus einer rechteckigen Blechtafel von 40 cm Breite ist eine Rinne mit nebenstehendem Querschnitt anzufertigen. Wie groß muss x gewählt werden, damit die Querschnittsfläche möglichst groß wird?

Wenn die Höhe x cm ist, dann ist die Querschnittsfläche $x(40 - 2x) = -2x^2 + 40x\,\mathrm{cm}^2$. Wir betrachten die Funktion A, die jeder Zahl x die Querschnittsfläche in cm^2 zuordnet. A

ist also die quadratische Funktion mit $A(x) = -2x^2 + 40x$. Wir bringen A durch quadratisches Ergänzen auf Scheitelform

$$A(x) = -2x^2 + 40x = -2(x^2 - 20x) = -2\left((x-10)^2 - 100\right) = -2(x-10)^2 + 200.$$

Der Scheitel von A ist $(10, 200)$ und der Funktionswert $\mathrm{A}(10) = 200$ ist der größtmögliche, weil bei Funktionswerten $A(x) = -2(x-10)^2 + 200$ an anderen Stellen x von 200 eine positive Zahl subtrahiert wird (siehe Abb. 1).

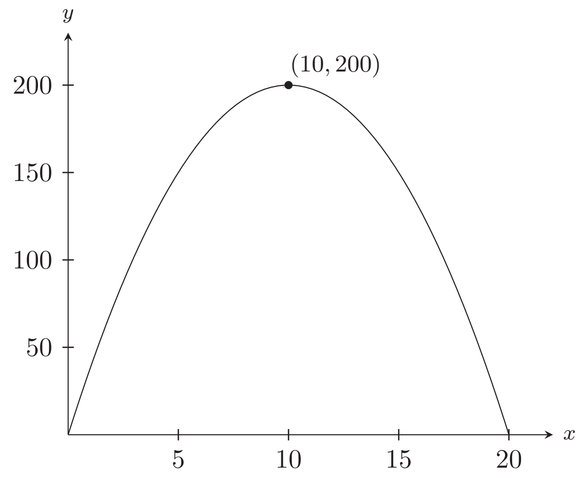

Abb. 1: Graph von A.

2.2 Approximation von Polynomfunktionen

Wir betrachten die Polynomfunktion $f := 2x^4 - 20x^2 + 3x + 1$ vom Grad 4 und die Polynomfunktion $g := 3x + 1$ vom Grad 1. Berechnen wir die Funktionswerte von f und g für sehr kleine Zahlen und runden auf die 3. Stelle, ergibt sich kein Unterschied. Zum Beispiel ist

$$g(0{,}001) = 1{,}003 \qquad \text{und} \qquad f(0{,}001) = 1{,}003.$$

Für sehr kleine Zahlen (Zahlen, die sehr nahe bei 0 liegen) sind offenbar die Funktionswerte von f und g fast gleich. Warum ist das so? Es ist $f = g + x^2 \cdot (2x^2 - 20)$. Für sehr kleine Zahlen t nahe bei 0 ist t^2 noch viel kleiner und kann daher vernachlässigt werden.

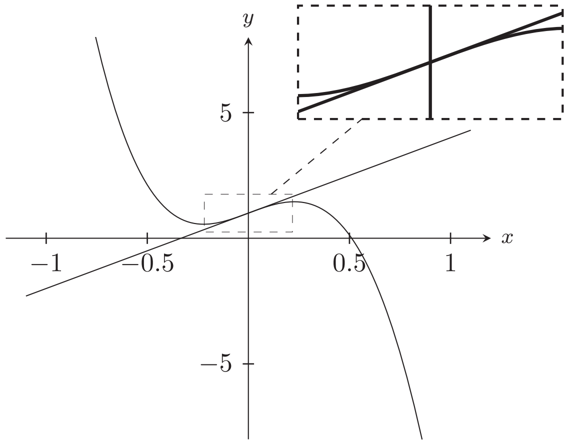

Abb. 2: Graphen von f und g.

3 Differenzieren von Polynomfunktionen

3.1 Auswerten von Polynomfunktionen

Wir bezeichnen mit $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, z \mapsto z$ die *identische Funktion* und mit $x^n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, z \mapsto z^n$ die *n-te Potenzfunktion*. Unter einer *Polynomfunktion* verstehen wir eine Linearkombination von Potenzfunktionen

$$f = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n,$$

wobei $c_0, \ldots, c_n$ reelle Zahlen sind.

Man kann zeigen, dass für reelle Polynomfunktionen die Koeffizienten $c_0, c_1, \ldots, c_n$ durch die Polynomfunktion eindeutig bestimmt sind. Wir brauchen daher Polynome und Polynomfunktionen nicht zu unterscheiden. Insbesondere können wir so den Grad von Polynomfunktionen, die von 0 verschieden sind, definieren: Der *Grad einer Polynomfunktion* $f \neq 0$ ist der größte Index der von 0 verschiedenen Koeffizienten, wir bezeichnen ihn mit $\operatorname{gr}(f)$. Der Leitkoeffizient von f ist der Koeffizient mit Index $\operatorname{gr}(f)$, wir bezeichnen ihn mit $\operatorname{lk}(f)$.

Ein grundlegendes Rechenverfahren für Polynomfunktionen ist die Division mit Rest (vgl. [2]). Ihr liegt der folgende Satz zugrunde.

Satz (Division mit Rest von Polynomen)
Zu je zwei Polynomen f und g mit $g \neq 0$ gibt es eindeutig bestimmte Polynome m und r mit den Eigenschaften

$$f = m \cdot g + r \qquad \textit{und} \qquad (r = 0 \textit{ oder } \operatorname{gr}(r) < \operatorname{gr}(g)).$$

Die Polynome m bzw. r heißen polynomialer Quotient von f und g bzw. Rest von f nach Division mit Rest durch g. Die Polynome m und r können mit dem folgenden Verfahren (Divisionsalgorithmus) berechnet werden:

- *Setze* $m := 0$ *und* $r := f$.
- *Solange* $\mathrm{gr}(r) \geq \mathrm{gr}(g)$, *ersetze* m *durch*

$$m + \mathrm{lk}(r)\,\mathrm{lk}(g)^{-1} x^{\mathrm{gr}(r)-\mathrm{gr}(g)}$$

und r *durch*

$$r - \mathrm{lk}(r)\,\mathrm{lk}(g)^{-1} x^{\mathrm{gr}(r)-\mathrm{gr}(g)} g.$$

Beispiel
Für die Division mit Rest „mit Papier und Bleistift" ist die folgende platzsparende Schreibweise üblich: man schreibt $\mathrm{lk}(r)\,\mathrm{lk}(g)^{-1} x^{\mathrm{gr}(r)-\mathrm{gr}(g)} g$ direkt unter r und dann die Differenz $\mathrm{lk}(r)\,\mathrm{lk}(g)^{-1} x^{\mathrm{gr}(r)-\mathrm{gr}(g)} g$ in die nächste Zeile. Wir rufen diese Schreibweise durch das folgende Beispiel in Erinnerung: $f = 2x^4 - 20x^2 + 3x + 1$ und $g = x - 1$.

$$\begin{array}{rrrrrl}
2x^4 & & -20x^2 & +3x & +1 & = (2x^3 + 2x^2 - 18x - 15) \cdot (x - 1) - 14 \\
2x^4 & -2x^3 & & & & \\
\hline
 & 2x^3 & -20x^2 & +3x & +1 & \\
 & 2x^3 & -2x^2 & & & \\
\hline
 & & -18x^2 & +3x & +1 & \\
 & & -18x^2 & +18x & & \\
\hline
 & & & -15x & +1 & \\
 & & & -15x & +15 & \\
\hline
 & & & & -14 &
\end{array}$$

Im Abschnitt 2.2 haben wir für ein Beispiel gezeigt, dass die Funktionswerte der Funktionen f und $c_0 + c_1 x$ von sehr nahe bei Null liegenden Zahlen fast gleich sind. Wie verhält sich das in einer kleinen Umgebung einer beliebigen Zahl $a \in \mathbb{R}$?
Wir dividieren f mit Rest durch $x - a$ und erhalten $f = f(a) + (x - a) \cdot m$, dabei ist m der polynomiale Quotient von f und $x - a$. Dann dividieren wir m mit Rest durch $x - a$ und erhalten $m = m(a) + (x - a) \cdot q$, dabei ist q der polynomiale Quotient von m und $x - a$.
Daraus erhalten wir:

$$f = f(a) + m(a) \cdot (x - a) + (x - a)^2 \cdot q\,,$$

dabei ist $q = 0$ oder ein Polynom vom Grad $\mathrm{gr}(f) - 2$. Die Zahlen $f(a)$ und $m(a)$ sind durch f eindeutig bestimmt.

Wie im Abschnitt 2.2 für $a = 0$ sieht man nun, dass die Funktionswerte der Funktionen f und $f(a) + m(a) \cdot (x - a)$ von Zahlen in einer kleinen Umgebung von a fast gleich sind.

Definition (Ableitung einer Polynomfunktion)
Für eine reelle Zahl a und eine Polynomfunktion $f = f(a) + m(a) \cdot (x - a) + (x - a)^2 \cdot q$ nennen wir $m(a)$, den Funktionswert des polynomialen Quotienten von f und $x - a$, die *Ableitung von f an der Stelle a* und schreiben dafür $f'(a)$.

Beispiel
Für die Polynomfunktion $f = 2x^4 - 20x^2 + 3x + 1$ gilt $f'(0) = 3$. Um $f'(1)$ zu berechnen, dividieren wir zweimal mit Rest durch $x - 1$:

$$\begin{aligned} f &= (2x^3 + 2x^2 - 18x - 15) \cdot (x - 1) - 14 \\ 2x^3 + 2x^2 - 18x - 15 &= (2x^2 + 4x - 14) \cdot (x - 1) - 29 \end{aligned}$$

Daher ist

$$f = -14 - 29(x - 1) + (x - 1)^2 \cdot (2x^2 + 4x - 14)$$

und somit gilt $f'(1) = -29$.

3.2 Zusammenhang mit dem Differentialquotienten in der Analysis

In der Analysis ist die Ableitung einer Funktion f an der Stelle $a \in \mathbb{R}$ als Grenzwert

$$\lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

von Differenzenquotienten definiert. Ist f eine Polynomfunktion, so gilt nach Division mit Rest

$$f = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)^2 \cdot u_a \,,$$

wobei u_a eine geeignete Polynomfunktion ist. Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt somit $f(t) = f(a) + f'(a)(t - a) + (t - a)^2 u_a(t)$, damit

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} = f'(a) + (t - a)u_a(t)$$

und schließlich

$$\lim_{t \to a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = f'(a) + \underbrace{\lim_{t \to a}(t - a)}_{=0} \cdot \lim_{t \to a} u_a(t) = f'(a).$$

Die beiden Ableitungsbegriffe stimmen also für Polynomfunktionen überein.

Anders ausgedrückt ist $f(a) + f'(a)(x - a)$ die Taylorentwicklung von f an der Stelle a bis zum Grad 1. Diese kann für eine Polynomfunktion f durch zwei Divisionen mit Rest durch $x - a$ berechnet werden.

Wir werden im weiteren zeigen, wie man einige Eigenschaften einer Polynomfunktion f in einer kleinen Umgebung von a aus den Eigenschaften der linearen Funktion $f(a) + f'(a)(x - a)$ ablesen kann. Dazu rufen wir einige Eigenschaften von linearen Funktionen in Erinnerung.

3.3 Lineare Funktionen

Zu je zwei reellen Zahlen k, d mit $k \neq 0$ erhält man eine *lineare Funktion*

$$kx + d\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, z \mapsto kz + d.$$

Wenn $d = 0$ ist, dann ist die lineare Funktion *homogen*. Für eine lineare Funktion f gilt $d = f(0)$ und $k = f(1) - d = f(1) - f(0)$. Für jede reelle Zahl a ist

$$f = kx + d = d + ka + k(x - a).$$

Damit gilt für jedes $a \in \mathbb{R}$, dass $f'(a) = k$ ist.

Der *Graph* einer Funktion g von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist die Menge

$$\mathrm{Graph}(g) := \{(a, g(a)) \,|\, a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Für die lineare Funktion $kx + d$ ist

$$\mathrm{Graph}(kx + d) = \{(a, ka + d)) \,|\, a \in \mathbb{R}\} = \{(0, d) + a(1, k) \,|\, a \in \mathbb{R}\}.$$

Daher ist $\mathrm{Graph}(kx+d)$ die Gerade in $\mathbb{R}^2$, die durch $(0, d)$ geht und parallel zur Geraden durch $(0, 0)$ und $(1, k)$ ist (letztere ist der Graph von kx).

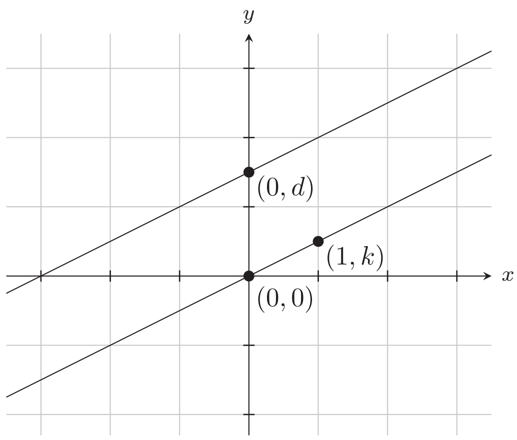

Abb. 3: Graphen von kx und $kx + d$.

Für je zwei reelle Zahlen k und d ist die lineare Funktion $kx + d$ genau dann *streng monoton wachsend*, wenn $k > 0$ und *streng monoton fallend*, wenn $k < 0$ ist. Insbesondere gilt: $kx+d$ hat ein Maximum oder Minimum an der Stelle $a \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn $k = 0$ ist.

Der Winkel zwischen dem Graphen von kx (oder von $kx + d$) und der ersten Koordinatenachse ist die Zahl α mit der Eigenschaft $\tan \alpha = \frac{k}{1} = k$.

Zu einer Polynomfunktion f und für $a \in \mathbb{R}$ betrachten wir die lineare Funktion $f(a) + f'(a)(x - a)$. Den Graphen dieser Funktionen nennt man *Tangente an den Graph von f in* $(a, f(a))$.

3.4 Differentialrechnung für Polynomfunktionen

Im Abschnitt 3.1 haben wir für eine Polynomfunktion f die Ableitung $f'(z)$ an einer Stelle z definiert. Für eine Polynomfunktion f nennen wir die Funktion

$$f' \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, z \mapsto f'(z),$$

Ableitung von f.

Die Ableitung von Polynomfunktionen hat die folgenden Eigenschaften:

1. Für zwei Polynomfunktionen f und g ist $(f + g)' = f' + g'$.
   Beweis: Sei a reelle Zahl und $f = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + (x - a)^2 \cdot p$,
   $g = g(a) + g'(a) \cdot (x - a) + (x - a)^2 \cdot q$. Dann ist

   $$f + g = f(a) + g(a) + (f'(a) + g'(a))(x - a) + (x - a)^2 \cdot (p + q)$$

   Daraus folgt für alle a, dass $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ ist, also $(f + g)' = f' + g'$.
2. Für eine Polynomfunktion f und $c \in \mathbb{R}$ ist $(c \cdot f)' = c \cdot f'$.
   Beweis: Sei a reelle Zahl und $f = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + (x - a)^2 \cdot p$. Dann ist

   $$c \cdot f = c \cdot f(a) + (c \cdot f'(a))(x - a) + (x - a)^2 \cdot p$$

   und daraus folgt direkt die Behauptung.
3. Für alle positiven ganzen Zahlen n ist $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$.
   Beweis: Für eine reelle Zahl a schreiben wir

   $$x^n = (a + (x - a))^n = \underbrace{(a + (x - a))(a + (x - a)) \cdots (a + (x - a))}_{n\text{-mal}}.$$

   Ausmultiplizieren ergibt eine Summe von Produkten $a^{n-i}(x-a)^i$, $0 \leq i \leq n$. Dabei kommt a^n genau einmal vor und $a^{n-1}(x - a)$ genau n-mal. Daher ist

   $$x^n = (a + (x - a))^n = a^n + n \cdot a^{n-1}(x - a) + (x - a)^2 \cdot u_a,$$

   wobei u_a eine geeignete Polynomfunktion ist. Daraus erhalten wir $(x^n)'(a) = n \cdot a^{n-1}$.

4. Für reelle Zahlen $c_0, \dots, c_n$ gilt:
$$(c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n)' = c_1 + 2c_2 x + \dots + n c_n x^{n-1}.$$
Beweis: Folgt direkt aus den vorangegangenen Aussagen.

5. Für zwei Polynomfunktionen f und g gilt: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$.
Beweis: Sei a reelle Zahl und $f = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + (x-a)^2 \cdot p$, $g = g(a) + g'(a) \cdot (x-a) + (x-a)^2 \cdot q$. Dann ist
$$f \cdot g = f(a)g(a) + (f'(a)g(a) + f(a)g'(a))(x-a) + (x-a)^2, \quad u_a \text{ Polynomfunktion.}$$
Daher ist $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ für alle reellen Zahlen a.

3.5 Differentialrechnung und Approximation

In einer kleinen Umgebung von $a \in \mathbb{R}$ sind f und $f(a) + f'(a)(x-a)$ fast nicht zu unterscheiden, da für ein z nahe bei a die Zahl $(z-a)^2$ (auch mit höheren Potenzen) sehr klein wird. Aus diesem Grund „erbt“ f in dieser Umgebung die Eigenschaften der linearen Funktion $f(a) + f'(a)(x-a)$, insbesondere gilt:

- f ist in einer Umgebung von a streng monoton wachsend $\Leftrightarrow$ die lineare Funktion $f(a) + f'(a)(x-a)$ ist streng monoton wachsend $\Leftrightarrow$ $f'(a) > 0$.
- f ist in einer Umgebung von a streng monoton fallend $\Leftrightarrow$ die lineare Funktion $f(a) + f'(a)(x-a)$ ist streng monoton fallend $\Leftrightarrow$ $f'(a) < 0$.
- Wenn f ein Maximum oder Minimum an der Stelle a hat, dann muss auch die lineare Funktion $f(a) + f'(a)(x-a)$ an dieser Stelle ein Maximum oder Minimum haben, also $f'(a) = 0$ sein.
- Der Graph von f sieht in einer kleinen Umgebung jedes Punktes wie ein Stück einer Geraden aus.

Bevor wir zu den Extremwertaufgaben und damit zur ersten Motivation zurückkehren, wiederholen wir quadratische Funktionen und einige Eigenschaften.

3.6 Quadratische Funktionen

Durch reelle Zahlen a, b, c mit $a \neq 0$ ist die *quadratische Funktion*
$$ax^2 + bx + c \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, z \mapsto az^2 + bz + c \tag{1}$$
gegeben. Wir bringen die quadratische Funktion durch „quadratisches Ergänzen“ auf Scheitelform
$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x - \frac{(-b)}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = a(x-s)^2 + t.$$

Dabei ist $s = \frac{-b}{2a}$ und $t = c - \frac{b^2}{4a}$. Insbesondere gilt $(ax^2 + bx + c)(s) = t$. Da für alle $z \in \mathbb{R}$ die Zahl $(x - z)^2$ nicht negativ ist, ist

$$(ax^2 + bx + c)(z) \begin{cases} \geq t & \text{falls } a > 0, \\ \leq t & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

Somit besitzt $ax^2 + bx + c$ in s ein absolutes Minumum $(a > 0)$ bzw. ein absolutes Maximum $(a < 0)$.

Aus der Scheitelform kann man auch die Nullstellen von $ax^2 + bx + c$ ablesen, denn

$$a(z - s)^2 + t = 0 \Leftrightarrow (z - s)^2 = \frac{-t}{a}.$$

Ist u eine „Wurzel aus $\frac{-t}{a}$", also eine Zahl mit $u^2 = \frac{-t}{a}$, dann ist $z - s = u$ oder $z - s = -u$. Die Nullstellen von $ax^2 + bx + c$ sind daher $s + u$ und $s - u$.

3.7 Extremwertaufgaben

Ist f eine Polynomfunktion, so schreiben wir f'' für $(f')'$, die Ableitung von f' und nennen diese Funktion die *zweite Ableitung von* f. Wenn

$$\begin{aligned} f &= f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)^2 \cdot q = \\ &= f(a) + f'(a)(x - a) + q(a)(x - a)^2 + (x - a)^3 \cdot p \end{aligned}$$

ist (dabei sind p und q geeignete Polynomfunktionen), dann ist

$$\begin{aligned} f' &= 0 + f'(a) + 2q(a)(x - a) + 3(x - a)^2 \cdot p + (x - a)^3 \cdot p' = \\ &= f'(a) + 2q(a)(x - a) + (x - a)^2 \cdot (3p + (x - a) \cdot p'). \end{aligned}$$

Daher ist $f''(a) = (f')'(a) = 2q(a)$. Insbesondere gilt dann

$$f = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + (x - a)^3 \cdot g,$$

dabei ist g eine Polynomfunktion.

Bei *Extremwertaufgaben* für f werden Zahlen $a \in \mathbb{R}$ untersucht, für die $f(a)$ minimal oder maximal ist. Hat f an der Stelle a ein Minimum oder Maximum, dann muss dasselbe auch für die lineare Funktion $f(a) + f'(a)(x - a)$ gelten, also $f'(a) = 0$ sein. Für die Polynomfunktion f bedeutet dies

$$f = f(a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 + (x - a)^3 \cdot g$$

Wir können f in der Nähe von a nun genauer (als durch die lineare Funktion $f(a) + f'(a)(x - a)$) durch die quadratische Funktion

$$f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2,$$

beschreiben. Wenn $f'(a) = 0$ ist, hat sie Scheitelform. Aus dem vorigen Abschnitt folgt, dass

- $f(a)$ maximal ist, falls $f''(a) < 0$ und
- $f(a)$ minimal ist, falls $f''(a) > 0$ ist.

Beispiel
Die Ableitung f' der Funktion $f := 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ ist $6(x^2 - x - 2)$.
Es ist $f'(2) = 0$ und daher

$$f = -19 + 9(x - 2)^2 + 2(x - 2)^3.$$

In der Nähe von 2 ist damit die quadratische Funktion $-19 + 9(x - 2)^2$ eine gute Näherung von f .

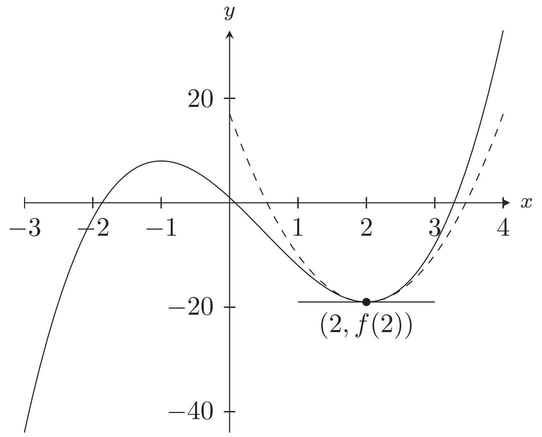

Abb. 4: Graphen von f und $-19 + 9(x - 2)^2$ (strichliert).

Mit der vorgestellten Methode können für Polynomfunktionen auch sogenannte Umkehraufgaben (vgl. [1], Kap. 3.6) im Schulunterricht sehr leicht gelöst werden.

Beispiel
Gesucht ist eine Polynomfunktion vom Grad 3 mit

- Nullstellen 0 und 1,
- einer Tangente in $(0, 0)$, die der Graph von x ist (also mit der ersten Koordinatenachse den Winkel $45°$ einschließt) und

- einem Maximum an der Stelle $\frac{1}{3}$.

Es sollen also vier Zahlen a, b, c, d so berechnet werden, dass die Polynomfunktion $a + bx + cx^2 + dx^3$ die gewünschten Eigenschaften hat. Das bedeutet:

- Weil 0 und 1 sind Nullstellen sind, muss $a = 0$ und $a + b + c + d = 0$ sein.
- Da die Ableitung von f in 0 gleich b ist und für die Tangente $\tan 45° = 1$ ist, muss $b = 1$ sein.
- Aus der Maximum-Bedingung folgt $0 = f'\left(\frac{1}{3}\right) = b + \frac{2}{3}c + \frac{1}{3}d$.

Als einzige Lösung erhält man $x - 2x^2 + x^3$. Weil $f''(\frac{1}{3}) = -2$ ist, hat die Funktion an der Stelle $\frac{1}{3}$ ein Maximum. Hätten wir dort ein Minimum verlangt, hätte die Aufgabe keine Lösung gehabt.

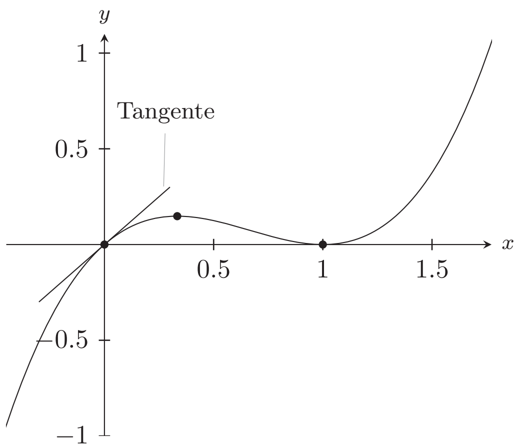

Abb. 5: Graph von $x - 2x^2 + x^3$.

Literatur

[1] G. Malle, M. Koth, H. Woschitz, S. Malle, B. Salzger, A. Ulovec: Mathematik verstehen 7, öbv, Wien 2011

[2] F. Pauer: Division mit Rest – der heimliche Hauptsatz der Algebra. Didaktikheft der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft 37 (2005)